הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 1מ – 104018

מבחן סוף סמסטר מועד ב', חורף - 02.03.22

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 5 שאלות בחירה מרובה ושאלה אחת עם 4 סעיפים של נכון או לא נכון. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 8 נקודות.

1. נתונה $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. אזי

(א) $\int_8^{10} f(x)dx \geq 1$

(ב) $x=0$ היא אסימפטוטה אנכית.

(ג) $f(x)$ אינה חסומה.

(ד) $f(x)$ פונקציה זוגית.***

(ה) הפונקציה גזירה באפס והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(0,0)$ הוא $y=0$.

2. נתונים האינטגרלים המוכללים

$$I=\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{[x]}dx,\quad II=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln x}dx$$

(א) I אינו מתכנס ו־ II מתכנס

(ב) שני האינטגרלים המוכללים אינם מתכנסים

(ג) I מתכנס ו־ II אינו מתכנס

(ד) שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים***

3. נתונים הטורים

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad II=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx$$

(א) שני הטורים אינם מתכנסים

(ב) I מתכנס ו־II אינו מתכנס

(ג) שני הטורים מתכנסים***

(ד) I אינו מתכנס ו־II מתכנס

4. תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x.

(א) אם $f(x)$ רציפה, אז $|f(x)|$ אינה גזירה.

(ב) אם $f(x)$ גזירה מימין בכל נקודה, אז $f(x)$ רציפה בכל נקודה.

(ג) אם לכל x קיים y כך ש־ $x\neq y$ וגם $f(x)\neq f(y)$, אז f חח"ע (חד־חד ערכית).

(ד) אם $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$ קיים, אז $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ קיים.***

5. תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $\sin(x^2)$, כלומר $F'(x) = \sin(x^2)$ לכל x.

(א) $x = 0$ היא נקודת פיתול של F.***

(ב) $F(x)$ קמורה בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$.

(ג) $x = 0$ נקודת קיצון מקומי של F.

(ד) $F^{(8)}(0) = 1$ כלומר, הנגזרת מסדר 8 בנקודה 0 שווה ל־ 1.

6. בשאלה זו 4 סעיפים שמשקל כל אחד מהם 2 נקודות. סמנו בכל סעיף אם מה שרשום נכון או לא נכון.

(א) אם $a_n^{b_n}$ מתכנסת, וגם $2 \leq a_n \leq 10$ לכל n, אז b_n מתכנסת.

נכון **לא נכון**

(ב) תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+1} x^{2n}$ הוא $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

נכון **לא נכון**

(ג)

$$\left(1 + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

נכון **לא נכון**

(ד) אם $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \cdot a_n$ קיים, אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

נכון **לא נכון**

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

7. (22 נקודות)

(א) (11 נקודות)

הראו כי

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\int_0^{\frac{1}{n}}\cos(t^2)dt$$

קיים במובן הרחב ומיצאו את הגבול, או הראו כי הגבול אינו קיים במובן הרחב.

פתרון: בקטע $[0,\frac{1}{n}]$ הפונקציה $\cos(t^2)$ יורדת ולכן לכל $0\le t\le\frac{1}{n}$ מתקיים

$$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)=\cos\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\le\cos(t^2)\le 1$$

לכן, ממונוטוניות האינטגרל המסויים

$$\frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\le\int_0^{\frac{1}{n}}\cos(t^2)dt\le\frac{1}{n}$$

שנותן

$$1=\cos 0\xleftarrow[n\to\infty]{}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\le n\cdot\int_0^{\frac{1}{n}}\cos(t^2)dt\le 1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

ולכן, לפי סנדביץ

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\int_0^{\frac{1}{n}}\cos(t^2)dt=1.$$

אפשר גם להסתכל על הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos(t^2)dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)dt}{1}=1$$

כאשר השתמשנו בשוויון בלופיטל, כאשר מרציפות האינטגרל נקבל כי

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x\cos(t^2)dt=\int_0^0\cos(t^2)dt=0$$

ולכן אפשר להשתמש בלופיטל, ובנוסף שימוש במשפט היסודי, ואחרי השוויון שימוש ברציפות של קוסינוס ושל הרכבה של רציפות.

אז, ע"י שימוש בהיינה, עבור

$$0\ne x_n=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

נקבל כי

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{x_n}\cos(t^2)dt}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{1}{n}}\cos(t^2)dt}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} n\cdot\int_0^{\frac{1}{n}}\cos(t^2)dt.$$

(ב) (11 נקודות)

מיצאו כמה שורשים יש למשוואה

$$x^2 = x\sin(x) + \cos(x).$$

זיכרו, עליכם להסביר את תשובתכם.

פתרון: נסתכל על הפונקציה

$$f(x) = x^2 - x\sin(x) - \cos(x).$$

היא גזירה כהפרש של גזירות ולכן

$$f'(x) = 2x - \sin(x) - x\cos x + \sin(x) = x(2 - \cos x).$$

לכן $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$ וגם $f'(x) < 0$ לכל $x < 0$.
כיוון שרציפה לכל איקס, אז לפי מסקנות לגרנג', בקטע $[0, \infty)$ הפונקציה עולה ממש, ובפרט חח"ע, ובקטע $(-\infty, 0]$ היא יורדת ממש ולכן חח"ע.
כיוון ש־ $f(0) = -1$ אז הפונקציה מתאפסת לכל היותר פעם אחת בקטע $[0, \infty)$ ולכל היותר פעם אחת בקטע $(-\infty, 0]$.
הפונקציה רציפה בכל נקודה, ובנוסף

$$f(10) = f(-10) = 100 - 10\sin(10) - \cos(10) \geq 100 - 10 - 1 = 89 > 0, \quad f(0) = -1$$

ולכן, לפי משפט ערך הביניים המופעל על הקטע $[0, 10]$ יש $0 < c_1 < 10$ עבורו $f(c_1) = 0$.
לפי משפט ערך הביניים המופעל על הקטע $[-10, 0]$ יש $-10 < c_2 < 0$ עבורו $f(c_2) = 0$.
לכן יש בדיוק שני פתרונות.

8. (30 נקודות)

(א) (10 נקודות)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{5x+8}{x^2+4x+6}dx$$

פתרון:

$$\int \frac{5x+8}{x^2+4x+6}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{16}{5}}{x^2+4x+6}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4+\frac{16}{5}-4}{x^2+4x+6}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx + \frac{5}{2}\int \frac{\frac{16}{5}-4}{x^2+4x+6}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+6| - 2\int \frac{1}{(x+2)^2+2}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+6| - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+6| - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C$$

(ב) (10 נקודות)

חשבו את $(34)^{\frac{3}{5}}$ ברמת דיוק של $\frac{1}{1000}$.

פתרון: נסתכל על $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$. נסתכל על פולינום טיילור של $x^{\frac{3}{5}}$ בסביבת הנקודה 32. אז $a=32,\ x=34$ ולכן, לפי נוסחת השארית של לגרנג', לכל n יש $32<c<34$ עבורו

$$R_n(34)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(34-32)^{n+1}=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\cdot 2^{n+1}.$$

וכיוון ש־ $32<c<34$ אז $0<\frac{1}{c^{\frac{1}{5}}}\le\frac{1}{32^{\frac{1}{5}}}=\frac{1}{2}$.

$$f(x)=x^{\frac{3}{5}},\quad f(32)=8\quad T_0(x)=8$$
$$f'(x)=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}},\quad f'(32)=\frac{3}{20}\quad T_1(x)=8+\frac{3}{20}(x-32)$$
$$|R_0(34)|=\left|\frac{\frac{3}{5c^{\frac{2}{5}}}}{1!}2^1\right|\le\frac{3}{10}$$
$$f''(x)=-\frac{6}{25}x^{-\frac{7}{5}}=-\frac{6}{25x^{\frac{7}{5}}},\quad f''(32)=-\frac{3}{1600}\quad T_2(x)=8+\frac{3}{20}(x-32)-\frac{3}{3200}(x-32)^2$$
$$|R_1(34)|=\left|\frac{-\frac{6}{25c^{\frac{7}{5}}}}{2!}2^2\right|\le\frac{3}{800}$$
$$f'''(x)=\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}=\frac{42}{125x^{\frac{12}{5}}}$$
$$|R_2(34)|=\left|\frac{\frac{42}{125c^{\frac{12}{5}}}}{3!}2^3\right|\le\frac{7}{125\cdot 2^9}<\frac{1}{1000}$$

כאשר השתמשנו באי שוויונים למעלה באי שוויונים $0<\frac{1}{c^{\frac{1}{5}}}<\frac{1}{2}$ שהוסבר למעלה.

ולכן $T_2(34)$ הוא מספר שמרחקו מ־ $(34)^{\frac{3}{5}}$ הוא לכל היותר $\frac{1}{1000}$.

$$T_2(x)=8+\frac{3}{20}(x-32)-\frac{3}{3200}(x-32)^2$$
$$T_2(34)=8+\frac{3}{20}(34-32)-\frac{3}{3200}(34-32)^2=8+\frac{3}{10}-\frac{3}{800}$$

(ג) (10 נקודות)

מיצאו את תחום ההתכנסות (קטע ההתכנסות) של טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\tan\frac{1}{n}} x^n$$

פתרון: נמצא את רדיוס ההתכנסות לפי נוסחת קושי־הדמר

$$\left(\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\tan\frac{1}{n}}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

מכיוון ש־

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^0 = 1$$

ומהגבול המיוחד $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ נובע ע"י שימוש בהיינה כי עבור $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq 0$ כי

$$\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \implies \frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \implies \left(\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^0 = 1$$

וכי

$$n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \implies \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

לכן $R = 1$.

נציב את הקצוות: עבור $x = 1$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\tan\frac{1}{n}}$$

וכיוון ש־

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\tan\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{0^+} = \infty$$

אז הטור אינו מתכנס.

עבור $x = -1$ נקבל באופן דומה טור אשר האבר הכללי שלו אינו מתכנס לאפס (כי בערך מוחלט מתכנס לאינסוף) ולכן אינו מתכנס.

לכן תחום ההתכנסות הוא $(-1, 1)$.